Παράδοξο του Russell

σύνολα

Έστω X το σύνολο όλων των συνόλων. Ορίζουμε $Y=\{A\in X : A\notin A\}$

Το Y είναι ένα σύνολο κ' επίσης το ερώτημα αν ισχύει $Y\in Y$ ή $Y\notin Y$

(α) Αν $Y\in Y$, τότε το Y ικανοποιεί την ιδιότητα που ορίζει το Y, δηλαδή $Y\notin Y$

(β) Αν $Y\notin Y$, τότε το Y δεν ικανοποιεί την ιδιότητα που ορίζει το Y, άρα ισχύει $Y\in Y$, έτσι δείξαμε ότι $Y\in Y \Leftrightarrow Y\notin Y$

που προφανώς είναι αντίφαση;

– που ορίζεται το σύνολο αυτό;

Απάντηση: Στο ότι θεωρήσαμε το "σύνολο" όλων των συνόλων. Θα λέμε η "κλάση" όλων των συνόλων

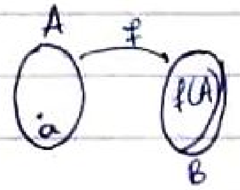
Πρόταση: Έστω A, B δύο σύνολα.

Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα

(α) $\exists\ f: A\to B$ 1-1

(β) $\exists\ g: B\to A$ επί

Απόδειξη: (α)$\Rightarrow$(β) Έστω $f: A\to B$ 1-1



Επιλέγουμε $a\in A$ αυθαίρετα κ' ορίζουμε $g: B\to A$ ως εξής:

$$g(y)=\begin{cases} a & \text{αν } y\in B-f(A) \\ x & \text{αν } y\in f(A) \text{ με } y=f(x) \end{cases}$$

(Σημείωση: Επειδή η f είναι 1-1 $\forall y\in f(A)$ $\exists$ μοναδικό τέτοιο x)

Η g είναι προφανώς επί (αν $x\in A$ $g(f(x))=x$)

(β)$\Rightarrow$(α) Έστω $g: B\to A$ επί

$\forall x\in A$ ισχύει $g^{-1}(\{x\})\neq\emptyset$ (διότι g επί)

Τα σύνολα $g^{-1}(\{x\})$, $x\in A$ είναι ξένα ανά δύο

$\forall x$ επιλέγουμε $a_x\in g^{-1}(\{x\})$ κ' ορίζουμε $f: A\to B$ $f(x)=a_x\in g^{-1}(\{x\})$

[Σημείωση: Εδώ χρησιμοποιήσαμε το αξίωμα επιλογής]

Η f είναι 1-1, διότι αν $x_1,x_2\in A$ με $x_1\neq x_2$

$$\left.\begin{array}{l} f(x_1)\in g^{-1}(\{x_1\}) \\ f(x_2)\in g^{-1}(\{x_2\}) \\ \kappa'\ g^{-1}(\{x_1\})\cap g^{-1}(\{x_2\})=\emptyset \end{array}\right\} \Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$$

Άσκ 10) E σύνολο.

$A,B\subseteq E,\ A\neq\emptyset,\ B\neq\emptyset$

Ορίζουμε $\phi: P(E)\to P(A)\times P(B)$ με $\phi(X)=(X\cap A, X\cap B)$

Νδο

(α) ϕ 1-1 $\Leftrightarrow E=A\cup B$

(β) ϕ επί $\Leftrightarrow A\cap B=\emptyset$

Απάντηση: α) $\Rightarrow$) Έστω ϕ 1-1

Αν $E\neq A\cup B$, τότε (επειδή $A\cup B\subseteq E$) θα $\exists x\in E$ με $x\notin A\cup B$, δηλαδή $x\notin A$ κ' $x\notin B$.

τότε $\phi(\emptyset)=(\emptyset\cap A,\emptyset\cap B)=(\emptyset,\emptyset)$

$\phi(\{x\})=(\{x\}\cap A,\{x\}\cap B)=(\emptyset,\emptyset)$

Άτοπο, διότι η ϕ είναι 1-1. Επομένως $E=A\cup B$

$\Leftarrow$) Έστω ότι $E=A\cup B$

νδο η ϕ είναι 1-1

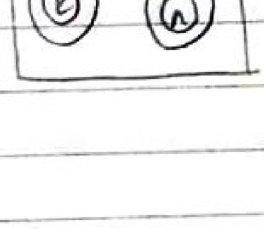
Έστω $K,\Lambda\in P(E)$ με $\phi(K)=\phi(\Lambda)$

$\Rightarrow (K\cap A, K\cap B)=(\Lambda\cap A,\Lambda\cap B)$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow K\cap A=\Lambda\cap A \ \kappa'\ K\cap B=\Lambda\cap B \\ K=K\cap E=K\cap(A\cup B)=(K\cap A)\cup(K\cap B) \\ \Lambda=\Lambda\cap E=\Lambda\cap(A\cup B)=(\Lambda\cap A)\cup(\Lambda\cap B) \end{array}\right] \Rightarrow K=\Lambda \quad \text{Άρα } \phi \text{ 1-1}$$

β) $\Leftarrow$) Έστω $A\cap B=\emptyset$ για νδο ϕ επί

Έστω $(K,\Lambda)\in P(A)\times P(B)$, δηλαδή $K\subseteq A$ κ' $\Lambda\subseteq B$



Για το σύνολο $X=K\cup\Lambda$ έχουμε

$\phi(X)=(X\cap A, X\cap B)=((K\cup\Lambda)\cap A,(K\cup\Lambda)\cap B)=$

$=((K\cap A)\cup(\Lambda\cap A),(K\cap B)\cup(\Lambda\cap B))=(K\cup\emptyset,\emptyset\cup\Lambda)=(K,\Lambda)$

$\Rightarrow$) Έστω ότι ϕ επί
Αν $A \cap B \neq \emptyset$, τότε $\exists x \in A \cap B$. Εφόσον η ϕ είναι επί
κ' $(\{x\}, \emptyset) \in P(A) \times P(B)$ θα $\exists X \in P(E)$, ώστε
$\phi(X) = (\{x\}, \emptyset)$
Αν δηλαδή $(X \cap A, X \cap B) = (\{x\}, \emptyset)$
τότε $x \in X$ κ' $x \in X$, ενώ εφόσον $x \in A \cap B$ έχουμε $x \in B$
όμως $x \in X \cap B$, άρα $x \in \emptyset$, άτοπο
Επομένως $A \cap B = \emptyset$

Ισοδύναμα ή ισοπληθικά σύνολα κ' πληθικοί αριθμοί

Μετρώντας τα στοιχεία του $A = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ έχουμε
$\begin{matrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix}$

ουσιαστικά ορίσαμε μία συνάρτηση $f: A \to \{1,2,3,4\}$
$f(\alpha) = 1$, $f(\beta) = 2$, $f(\gamma) = 3$, $f(\delta) = 4$, η οποία f είναι 1-1 κ' επί.

Αυτό μας οδηγεί στον εξής ορισμό:
Ορισμός Δύο σύνολα A, B λέγονται ισοπληθικά (ή ισοδύναμα ή λέμε ότι έχουν την ίδια ισχύ)
αν $\exists$ συνάρτηση $f: A \to B$ 1-1 κ' επί.
Όταν συμβαίνει αυτό θα συμβολίζουμε $A \simeq B$

Πρόταση: Για οποιαδήποτε σύνολα A, B, Γ ισχύουν τα εξής:
(i) $A \simeq A$
(ii) Αν $A \simeq B$, τότε $B \simeq A$
(iii) Αν $A \simeq B$ κ' $B \simeq \Gamma$, τότε $A \simeq \Gamma$

Απόδειξη (α) Η ταυτοτική συνάρτηση $I: A \to A$ $I(x) = x$ $\forall x \in A$ είναι 1-1 κ' επί

(β) Αν $A \simeq B$, δηλαδή $\exists f: A \to B$ 1-1 κ' επί, τότε η $f^{-1}: B \to A$ είναι 1-1
κ' επί. Άρα $B \simeq A$

Η πρόταση αυτή λέει ότι η $\cong$ είναι αυτοπαθής, συμμετρική κ' μεταβατική.
(άρα η $\cong$ είναι σχέση ισοδυναμίας στην κλάση όλων των συνόλων)